

LA RIVELAZIONE DELLE SACRE SCRITTURE MATEMATICHE

di Giovanni Amendola

Nel corso dei secoli la scrittura matematica ha subito notevoli cambiamenti, soprattutto tra il Cinquecento ed il Seicento, quando in ambito algebrico si è passati dalla cosiddetta algebra retorica, all'algebra sincopata, fino all'algebra simbolica. Un passaggio che ha favorito una maggiore comprensione degli stessi concetti aritmetici ed algebrici, ma anche geometrici ed analitici. Cartesio nel *Discorso sul metodo*, a proposito dell'«algebra dei moderni», riconosceva di essere dinanzi ad «un'arte confusa e oscura, un ostacolo per la mente, anziché una scienza volta a coltivarne le capacità». In modo simile, anche la «geometria degli antichi» mostrava i suoi limiti per via di «un grande sforzo dell'immaginazione».¹ Da qui, la grande innovazione operata dal filosofo francese attraverso la geometria analitica che, congiungendo la «geometria degli antichi» all'«algebra dei moderni», apportava, grazie alla lenta introduzione della scrittura simbolica, una notevole chiarezza nella matematica del suo tempo.

La ricerca di una scrittura simbolica in grado di esprimere con estremo rigore e chiarezza l'intera matematica e non solo, diventerà una sorta di ricerca del Santo Graal soprattutto tra la seconda metà dell'Ottocento e i primi decenni del Novecento, quando si verificherà un intreccio sempre più stretto tra matematica e logica. Prima con Boole, che tradurrà nozioni della logica classica nel linguaggio dell'analisi matematica e, poi, con Frege, che cercherà viceversa di tradurre l'aritmetica nei formalismi logici ed insiemistici. La scrittura logico-formale della matematica, ovvero la sua riduzione ad una teoria assiomatico-deduttiva, apparirà sempre più come la strada verso un'auto-fondazione definitiva della propria coerenza interna e della propria completezza sistemica. Ma proprio attraverso quelle stesse “sacre” scritture irromperà una “rivelazione” inattesa sulla concezione della matematica e del sapere in genere. Si tratterà, oltre che dei fondamentali risultati gödeliani ed altri affini, della ricomprensione della stessa matematica e della conoscenza umana secondo la chiave interpretativa religiosa e teologica della *revelatio*.

Il presente contributo si articola nelle seguenti sezioni. Una sezione introduttiva in cui cercheremo di chiarire il perché viene utilizzato il termine “sacro” in riferimento alla matematica e alla sua scrittura (*1. Matematica e sacro*). Passeremo poi a ripercorrere la storia più recente (a partire da Cartesio) sulla ricerca di una scrittura matematica in grado di risolvere i problemi posti in essere dalla riflessione scientifica e filosofica (*2. La ricerca di una sacra scrittura matematica*). Nella terza sezione (*3. Impotenza e potenza della sacra scrittura matematica*) considereremo sia i limiti (rispetto alle attese) sia le potenzialità sviluppate e realizzate attraverso tale scrittura. Infine nella quarta ed ultima sezione (*4. La rivelazione delle sacre scritture matematiche*), da cui prende titolo l'intero articolo, cercheremo di chiarire in che senso e perché parlare di una “rivelazione” in seno alla ricerca

¹ Questi brevi riferimenti citazionali rimandano a Cartesio, *Discorso sul metodo*, Roma-Bari, Laterza, 1998, p. 25, e saranno più ampiamente ripresi nel seguito.

di una scrittura matematica, ampliando il nostro sguardo sul rapporto tra razionalità matematica e realtà fisica e sulla comprensione filosofica della modernità.

1. *Matematica e sacro*

Da uno sguardo superficiale ed immediato al variegato e complesso mondo della matematica si mostra quella che potremmo definire una *sacralità religiosa della matematica*. La matematica appare molto spesso nel sentire comune con una sorta di aura sacrale, in quanto viene ritenuta, se non qualcosa di incomprensibile ed oscuro, quantomeno enigmatica, misteriosa, ma, proprio per questo, affascinante. La scrittura matematica si mostra, già a questo livello più immediato, come “sacra”. Infatti, riprendendo la classica descrizione di Rudolf Otto, potremmo dire che l’incontro con la scrittura matematica conduce, al tempo stesso, dinanzi ad un *mysterium fascinans*, in quanto attrae ed affascina, e un *mysterium tremendum*, suscitando in molti un atteggiamento reverenziale dinanzi a ciò che profondamente sfugge.²

Tuttavia, la sacralità della matematica non si riduce a questo aspetto, ma richiama ulteriori dimensioni semantiche del termine “sacro”, derivante dalla radice indoeuropea “sak”, “sac” o “saq”, da cui l’accadico *sakāru*, col significato di “sbarrare”, oppure *saqru*, ovvero “elevato”. La stessa radice “sac”, oltre a generare il termine latino *sacer* (sacro), è all’origine della parola *sanctus* (santo), traduzione latina del termine greco *hagios*, che denota qualcosa di inviolabile a cui gli esseri umani e mortali non hanno accesso. In tal senso, il “sacro” è ciò che è separato dal “profano”. Nella tradizione ebraica, Dio è detto “il tre volte santo” per esprimere la perfezione del suo essere totalmente altro rispetto alla realtà mondana. Il “Santo dei santi” (*Sanctum sanctorum*) o “Santissimo” indicava l’area più sacra del Tempio di Gerusalemme, che custodiva l’Arca della Testimonianza e doveva essere separata da tutto il resto attraverso una tenda di protezione. Nella tradizione cristiana, per indicare che la realtà divina (il Regno di Dio) entrava nella storia umana in pienezza, annullando ogni separazione tra sacro e profano, si dice che, nel momento della morte di Gesù, «il velo del tempio si squarciò in due, da cima a fondo» (Mc 15,38).

La matematica fin dalle sue origini ha manifestato tale sacralità, richiedendo una sorta di cammino iniziatico per apprendere conoscenze ritenute spesso esoteriche, come, ad esempio, si racconta per la scuola pitagorica, dove il numero (*arithmos*) si ergeva a principio architettonico di tutta la realtà. Il matematico doveva dunque essere iniziato a conoscenze così elevate (separate dal mondo sensibile) e non per tutti. Siamo dinanzi a ciò che potremmo chiamare *sacralità ontologica della matematica*, in quanto il suo ambito di conoscenza viene ritenuto come separato o al di là delle apparenze sensibili della realtà. Questa separazione ontologica, per certi aspetti, la possiamo rinvenire ancora oggi nell’intendere la matematica come *astrazione* della razionalità del reale. Concezione emblematicamente rinvenibile in coloro che ritengono la matematica come espressione di un mondo intelligibile, tipico delle visioni platoniste presenti nella filosofia della matematica. Per avere qualche esempio, si pensi al matematico ungherese Paul Erdős (1913-1996) che riteneva la ricerca matematica come un cammino di scoperta nel mondo matematico e parlava delle dimostrazioni matematiche più eleganti come appartenenti e provenienti da un ipotetico libro posseduto da

² Cfr. R. Otto, *Über das Irrationale in der Idee des Göttlichen und sein Verhältnis zum Rationalen*, Gotha, L. Klotz, 1917 (trad. it. R. Otto, *Il sacro. Sull’irrazionale nell’idea del divino e il suo rapporto con il razionale*, Brescia, Morcelliana, 2011).

Dio. Amava infatti dire, dinanzi a tali dimostrazioni: “questa viene dal Libro”.³ Sulla concezione platonista della matematica si esprime anche il matematico francese Jean Dieudonné (1906-1992) del gruppo dei bourbakisti,⁴ ritenendo che i matematici fossero platonisti nei giorni feriali (ovvero quando fanno matematica) e formalisti in quelli festivi (ovvero quando non la fanno, soltanto per evitare di entrare in dispute di carattere filosofico).⁵

Infine, la stessa scrittura matematica si è mostrata come sacra in quanto è stata sempre più intesa come separata da ogni possibile interferenza di “errori” connessi con il linguaggio naturale⁶ che, per l’ambiguità e la polisemia, conduce frequentemente a malintesi ed incomprensioni. Come sosteneva Leibniz, la scrittura simbolico-formale (la *characteristica universalis*) dovrà permettere di evitare «ogni ripetizione, digressione, prolissità superflua, insufficienza, occultamento intenzionale e preterintenzionale, trascuratezza, infine ogni disordine, fraintendimento e mossa illecita». ⁷ La scrittura matematica cercherà di assumere sempre più i tratti di una “scrittura sacra” separata dalla “scrittura profana”. In tal senso, possiamo anche parlare di una *sacralità linguistica della matematica*, che esploreremo maggiormente nella seguente sezione.

2. La ricerca di una sacra scrittura matematica

In questa sezione ripercorreremo alcuni tratti del cammino di ricerca matematico-filosofico di una scrittura formale in grado di ovviare alle problematiche suesposte del linguaggio naturale. Il percorso che seguiremo non pretende di essere esaustivo né per quanto riguarda le questioni inerenti al tema trattato né per gli autori a cui faremo riferimento. Ci focalizzeremo infatti sul pensiero filosofico occidentale della modernità, facendo in particolar modo riferimento a Cartesio, Leibniz, Boole e Frege.

2.1. Ripartendo da Cartesio

Cartesio nel 1637 nel *Discorso sul metodo* offre almeno due elementi interessanti per il nostro discorso sulle scritture matematiche. Innanzitutto, la constatazione di essere dinanzi ad un procedimento, rigoroso e preciso, utilizzato per condurre, in modo inequivocabile, alla certezza delle proposizioni affermate (il modello basilare è l’organizzazione della geometria sviluppata da Euclide negli *Elementi*), intravedendo la possibilità di estendere tale approccio ben oltre le “arti meccaniche”: «Mi interessavo alla matematica per via dell’evidenza e della

³ Nel 1998 i matematici Martin Aigner e Günter Ziegler hanno pubblicato in onore di Paul Erdős un libro intitolato *Proofs from the Book*, contenente le dimostrazioni matematiche ritenute più belle (cfr. M. Aigner, G. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Berlin, Springer, 1998).

⁴ I bourbakisti sono un gruppo di matematici, in maggior parte francesi, che si riunirono sotto lo pseudonimo collettivo di Nicolas Bourbaki tra il 1934 e il 1935 per riformare la matematica nella sua esposizione accademica ritenuta insoddisfacente e bisognosa di una rifondazione più rigorosa e assiomatica. Tra i fondatori del gruppo vanno certamente annoverati Henri Cartan (1904-2008), Claude Chevalley (1909-1984), Jean Delsarte (1903-1968), Jean Dieudonné (1906-1992) e André Weil (1906-1998, fratello della filosofa Simone Weil). Per ulteriori approfondimenti rimandiamo a A.D. Aczel, *The Artist and the Mathematician. The Story of Nicolas Bourbaki, the Genius Mathematician Who Never Existed*, Thunder’s Mouth Press, 2006.

⁵ Cfr. J. Dieudonné, *The Work of Nicholas Bourbaki*, «The American Mathematical Monthly», 77, 1970, 2, p. 144.

⁶ La locuzione “linguaggio naturale” è comunemente utilizzata in ambito informatico e, più specificamente, nel campo dell’Intelligenza Artificiale in opposizione al “linguaggio formale” ed ai tentativi di elaborazione algoritmica che si occupano di traduzione o di interpretazione (*Natural Language Processing*).

⁷ G.W. Leibniz, *Lettera a Gabriel Wagner sull’importanza della logica*, in *Nuovi saggi sull’intelletto umano*, in D.O. Bianca (a cura di), *Scritti filosofici*, Torino, UTET, 1968, p. 786.

certezza delle sue ragioni; ma non ne afferravo la vera funzione e, supponendo che servisse solo alle arti meccaniche, mi stupivo che su basi tanto stabili e salde non si fosse costruito qualcosa di più importante».⁸

Il secondo elemento concerne invece le difficoltà che bloccavano queste attese di utilizzo del metodo matematico, dovute agli eccessivi sforzi di immaginazione richiesti nella geometria e all'oscurità e alla confusione (l'opposto delle idee chiare e distinte) per comprendere l'algebra del suo tempo:

Quanto poi all'analisi degli antichi e all'algebra dei moderni, a parte il fatto che il loro campo è limitato a questioni molto astratte e che appaiono prive di utilità, la prima è sempre legata alla considerazione delle figure che può giovare all'esercizio dell'intelligenza solo a prezzo di *un grande sforzo dell'immaginazione*; e, per quel che concerne la seconda, ci siamo lasciati irretire da certe formule e da certe cifre fino al punto da farne *un'arte confusa e oscura*, un ostacolo per la mente, anziché una scienza volta a coltivarne le capacità.⁹

È infatti a partire dal XVI secolo che inizia quel graduale passaggio dall'algebra retorica o sincopata all'algebra simbolica.¹⁰ Si cominciano ad utilizzare le abbreviazioni *p*, invece di *plus*, *m*, invece di *minus*, *ae*, invece di *aequalis*. Mentre i simboli che utilizziamo ancora oggi, come “+” e “-” saranno introdotti in ambito tedesco dal matematico Johannes Widmann (1460-1498) per indicare i pesi in eccesso o in difetto di casse e, poi, utilizzati dal matematico e teologo luterano Michael Stifel (1487-1567) nel trattato *Arithmetica integra* del 1544. Siamo tuttavia in una fase germinale per tali simboli. Ad esempio, il matematico francese François Viète (1540-1603) per indicare l'uguaglianza utilizzava inizialmente la parola *aequatur*, poi sostituita dal simbolo “~”, mentre Cartesio la indicava con la lettera greca minuscola “α”. Il segno “=”, che avrà successo nei secoli a venire, sarà invece introdotto nel 1557 dall'algebrista gallese Robert Recorde (1512-1558). Bisognerà invece attendere il 1631 per la comparsa dei simboli algebrici “x” per la moltiplicazione e “/” per la divisione, introdotti dal matematico inglese e pastore anglicano William Oughtred (1574-1660) nell'opera *Clavis mathematicae*. Il simbolo odierno per indicare la radice quadrata venne introdotto da Cartesio nel 1637, mentre il matematico italiano Rafael Bombelli (1526-1572) lo indicava con l'abbreviazione *R.q.*

Per quanto riguarda le equazioni algebriche si usavano le parole *numerus simplex*, per indicare il termine noto, mentre *radix*, *res*, *cosa* o *tanto* per l'incognita. L'incognita *res* sarà abbreviata con *R* o *co*, l'incognita al quadrato con *Z* o *ce* (da *census*)¹¹ e l'incognita al cubo con *C* o *cu* (da *cubus*). Per tali denominazioni, ancora alla fine del medioevo, l'algebra era chiamata *Regula rei et census*.¹² Le equazioni, per giungere alla forma oggi nota, hanno attraversato vari passaggi. Il matematico francese Nicolas Chuquet (1445-1488) nell'opera *Triparty* scriveva $8x^3$ per indicare $8x^3$ e 7^{lm} per $7x^{-1}$. Rafael Bombelli utilizzava un semicerchio

⁸ Cartesio, *Discorso sul metodo*, p. 11.

⁹ *Ivi*, p. 25. Il corsivo è nostro.

¹⁰ Le successive informazioni circa l'introduzione dei vari simboli algebrici li riprendiamo da J. Mazur, *Storia dei simboli matematici. Il potere dei numeri da Babilonia a Leibniz*, Milano, Il Saggiatore, 2015.

¹¹ Il termine “census” è entrato nel lessico algebrico per tradurre l'arabo “māl” presente nei testi di al-Khwārizmī, Abū Kāmil, e Ibn Badr. Uno studio dettagliato del termine in questione è presente in J.A. Oaks, H.M. Alkhateeb, *Māl, enunciations, and the prehistory of Arabic algebra*, «Historia Mathematica», 32, 2005, 4, pp. 400-425.

¹² Cfr. J. Mazur, *Storia dei simboli matematici*.

con all'interno un numero per indicare l'esponente dell'incognita. Sarà poi François Viète ad usare le lettere per rappresentare l'incognita e le sue potenze. Fino ad arrivare al matematico e presbitero anglicano John Wallis (1616-1704) per trovare qualcosa di simile al formalismo odierno.¹³

Ad esempio, l'equazione algebrica che oggi scriveremo nel seguente modo:

$$2x^2 - 3x^3 = 6x + 4$$

prima dell'introduzione delle abbreviazioni e dei simbolismi, nella fase "retorica" dell'algebra, sarebbe stata espressa dicendo qualcosa di simile a «tre volte il cubo del mio numero si sottrae a due volte il quadrato del numero e chiedo uguale a sei volte il numero più quattro». Nella fase dell'algebra sincopata, il frate francescano e matematico italiano Luca Pacioli (1447-1517), usando la notazione presente nell'opera *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* del 1494, l'avrebbe espressa con

$$2ce\ m\ 3cu\ ae\ 6co\ p\ 4$$

Nella fase dell'algebra simbolica, avremmo trovato espressioni sempre più simili alle nostre conoscenze matematiche di base. François Viète nel 1591 nella sua "nuova algebra" avrebbe scritto

$$2\ Aq - 3Acu\ aequatur\ 6A + 4$$

Cartesio nel 1637, usando il formalismo introdotto ne *La Géométrie*, avrebbe scritto

$$2xx - 3xxx\ \alpha\ 6x + 4$$

E, infine, John Wallis nel 1693, usando le notazioni introdotte nel suo trattato *Algebra*, avrebbe scritto

$$2xx - 3x^3 = 6x + 4$$

Quella disciplina confusa e oscura si chiarirà molto attraverso questo simbolismo. Per comprendere questi ed ulteriori sviluppi della scrittura matematica, ritorniamo a Cartesio, che oltre ad aver osservato il potenziale insito nelle discipline matematiche, della geometria e dell'algebra, aveva anche rilevato l'importanza di una disciplina che allora era prettamente filosofica, la logica, e che sembrava essere utile soltanto per chiarire la comunicazione, senza apportare una reale crescita conoscitiva:

Quando ero giovane mi ero dedicato un po', fra le parti della filosofia, alla logica, e, fra quelle della matematica, all'analisi dei geometri e all'algebra. Erano tre arti o scienze che pareva dovessero dare qualche contributo al mio disegno. Ma sottoponendole a esame mi accorsi che,

¹³ Cfr. M. Kline, *Storia del pensiero matematico. Dall'antichità al settecento*, I, Torino, Einaudi, 1991, pp. 303-305.

per quanto riguarda *la logica, i suoi sillogismi e la maggior parte delle sue regole servono a spiegare agli altri le cose che si sanno.*¹⁴

Queste potenzialità inesplicate ed intraviste nell'aritmetica, nella geometria e nella logica, secondo Cartesio non potevano restare confinate a questi saperi, ma occorreva procedere ben oltre, altrimenti si rischiava di ridurre l'esercizio di queste discipline ad un vago intrattenimento ludico: «né certo terrei in gran conto queste regole, se non fossero sufficienti ad altro che a risolvere quei problemi vacui, con i quali matematici [*Logistae*] e geometri [*Geometrae*] sfaccendati sono soliti svagarsi [*otiosi ludere consueverunt*]; in tal modo infatti riterrei di non aver fatto niente altro, che occuparmi di frivolezze, forse con maggior sottigliezza di altri».¹⁵ Si tratta invece per Cartesio di tendere verso una *Mathesis Universalis*. Ovvero una disciplina che intercetta sia l'idea di una "matematica vera", come comun denominatore di scienze basate su "ordine" e "misura", quali appunto l'aritmetica e la geometria, ed estendibile anche alla musica, alla meccanica, all'ottica, all'astronomia e altro ancora, sia quella di un "metodo generale" per realizzare un discorso valevole per qualsiasi soggetto.¹⁶ Tali idee sono esposte principalmente nella quarta regola del trattato *Regulae ad directionem ingenii*, scritto presumibilmente tra il 1619 e il 1629,¹⁷ dove viene detto che

A chi rifletta con maggior attenzione diventa infine chiaro che si riferiscono alla *Mathesis* solamente tutte quelle cose nelle quali si fa oggetto di esame l'ordine come pure la misura [*ordo vel mensura*], e che non ha importanza se tale misura è da cercare nei numeri, o nelle figure, o negli astri, o nei suoni, o in qualunque altro oggetto; e quindi deve esserci una scienza universale, che spieghi tutto quello che si può desiderare circa l'ordine e la misura non riferita ad una materia specifica, ed essa sia chiamata *Mathesis universale*, [...] poiché in essa è contenuto tutto ciò per cui le altre scienze sono dette parti della matematica.¹⁸

Tutto ciò è connesso con la ricerca di un *linguaggio universale* in grado di esprimere simbolicamente e accuratamente i pensieri così come stava accadendo per i numeri e le figure geometriche. Dunque, non si tratta soltanto di un linguaggio comune a tutti gli uomini per agevolare la comunicazione, ma dovrà essere per Cartesio un linguaggio in grado di chiarire le controversie filosofiche: «Ora ritengo che questa lingua sia possibile e che si possa trovare la scienza da cui essa dipende, per mezzo della quale i campagnoli potrebbero giudicare la verità delle cose meglio di quanto non facciano ora i filosofi».¹⁹

2.2. *La scrittura matematica come modello di una scrittura formale universale*

Leibniz prenderà il testimone di Cartesio e avanzerà ancor più concretamente la proposta di una scienza universale attraverso la creazione di un *calculus ratiocinator* basato sulla simbolizzazione del linguaggio umano e sull'individuazione di una *caratteristica*

¹⁴ Cartesio, *Discorso sul metodo*, pp. 24-25.

¹⁵ *Idem*, *Regole per la guida dell'intelligenza*, Milano, RCS Libri, 2000, pp. 166-167.

¹⁶ Cfr. G. Granel, *L'époque dénouée*, Paris, Hermann, 2012, pp. 51-105.

¹⁷ Per uno sguardo generale sulla questione della datazione, rimandiamo a L. Urbani Ulivi, *Saggio introduttivo*, in Cartesio, *Regole per la guida dell'intelligenza*, pp. 11-12.

¹⁸ Cartesio, *Regole per la guida dell'intelligenza*, pp. 175-177.

¹⁹ *Id*, *Lettre au Père Mersenne du 20 novembre 1629*, in C. Adam, P. Tannery (a cura di), *Oeuvres de Descartes. Correspondance*, Paris, Vrin, 1969, pp. 81-82. A riguardo rimandiamo allo studio di C.S. Roero, *I matematici e la lingua internazionale*, «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», 8, 1999, 2, pp. 159-182.

universalis.²⁰ Il filosofo tedesco sogna infatti la creazione di un linguaggio simbolico universale su cui poter operare una sorta di calcolo filosofico-razionale in modo da poter risolvere ogni disputa filosofica e teologica, similmente a quanto accadeva nei calcoli matematici o nelle dimostrazioni geometriche per giungere unanimemente alla soluzione di un problema o alla validità di una asserzione. Ogni pensiero, ogni concetto e ragionamento dovrebbero essere codificati in simboli e caratteri, allo stesso modo in cui l'aritmetica si esprimeva attraverso numeri e la geometria attraverso linee. Sono idee già presenti nell'opera giovanile *De arte combinatoria* del 1666²¹ e approfondite ulteriormente nel saggio del 1680 intitolato *De scientia universalis seu calculo philosophico*, da cui proviene la notissima citazione del filosofo tedesco:

Per ritornare all'espressione dei pensieri per mezzo di caratteri, sento che le controversie non finirebbero mai e che non si potrebbe mai imporre il silenzio alle sette, se non ci riportassimo *dai ragionamenti complicati ai calcoli semplici, dai vocaboli di significato vago ed incerto ai caratteri determinati* [...]. Una volta fatto ciò, quando sorgeranno controversie, non ci sarà maggior bisogno di discussione tra due filosofi di quanto ce ne sia tra due calcolatori [ovvero tra persone che fanno calcoli matematici]. Sarà sufficiente, infatti, che essi prendano la penna in mano, si siedano a tavolino, e si dicano reciprocamente (chiamato, se loro piace, un amico): *calculemus*.²²

Se questo è il grande sogno di Leibniz, tuttavia per raggiungerlo la strada è impervia, in quanto le lingue ordinarie, certamente utili al ragionamento, conducono a numerosi equivoci ed incomprensioni ed, inoltre, non sono strutturate in modo tale da potervi eseguire sopra un calcolo che permetta di scoprire gli errori in un dibattito attraverso una serrata analisi del discorso a partire dagli elementi più primitivi: «Questo mirabilissimo vantaggio sinora danno soltanto i segni impiegati dagli aritmetici e dagli algebristi, nei quali ogni ragionamento consiste nell'uso di caratteri, e ogni errore mentale è lo stesso che un errore di calcolo». ²³ Un riferimento ancora più esplicito sulla necessità della metodologia matematica come guida per il pensare umano, o quantomeno per quella forma analitica del ragionamento, lo ritroviamo nei *Nuovi saggi sull'intelletto umano*, del 1704, dove Leibniz afferma che

bisogna che il metodo, seguito nelle nostre ricerche quando si tratta di esaminare le idee, sia regolato sull'esempio dei matematici, che da certi principi molto chiari e facili (che sono gli assiomi e le definizioni) procedono a piccoli passi e per una catena continua di ragionamenti verso la scoperta e la dimostrazione di verità che a tutta prima sembravano superiori alla capacità umana. L'arte di trovar le prove e i metodi mirabili che essi hanno inventato per districare ed ordinare le idee intermedie, hanno prodotto scoperte meravigliose e insperate. Ma sapere se con il tempo si potrà inventare qualche metodo simile che serva alle altre idee altrettanto bene quanto alle idee di grandezza, è cosa che qui non voglio decidere. *Se altre idee fossero almeno esaminate secondo il metodo ordinario dei matematici, condurrebbero il nostro*

²⁰ Cfr. J. Mittelstrass, *The Philosopher's conception of Mathesis Universalis from Descartes to Leibniz*, «Annals of Science», 36, 1979, 6, p. 603.

²¹ Cfr. G.W. Leibniz, *Dissertatio de arte combinatoria* (1666), in *Sämtliche Schriften und Briefe*, Berlin, Akademie Verlag, 1923.

²² G.W. Leibniz, *De scientia universalis seu calculo philosophico*, in F. Barone (a cura di), *Scritti di logica*, Bologna, Zanichelli, 1968, p. 237. Il corsivo è nostro.

²³ *Ivi*, p. 240.

pensiero più lontano, forse, di quanto siamo portati ad immaginarci. E ciò potrebbe attuarsi specialmente nella morale, come ho detto più di una volta.²⁴

Leibniz rivaluta inoltre il ruolo della logica filosofica aristotelica connettendola proprio con il ragionamento dimostrativo degli algebristi e dei geometri. Aristotele infatti negli *Analitici Primi*, ancor prima di Euclide, aveva applicato il metodo dimostrativo matematico alla logica sillogistica:

la logica è suscettibile di dimostrazione quanto la geometria e si può affermare che la logica dei geometri, o il modo di argomentare che Euclide ha svolto e stabilito nei suoi teoremi, sono un'estensione o un'applicazione particolare della logica generale. [...] Ciò che ha reso più facile il ragionare dimostrativamente nelle matematiche, è che l'esperienza può garantire ad ogni momento il ragionamento, cosa che accade anche nelle figure dei sillogismi.²⁵

Sembra già palesarsi un legame a filo doppio tra la logica e la matematica, sia nella possibilità di matematizzare la logica (realizzata da Boole) sia in quella di logicizzare la matematica (indagata primariamente da Frege). Leibniz riabilita, in tal modo, la logica sillogistica aristotelica, ampliandone gli orizzonti epistemici, riconoscendo in essa proprio i caratteri di una *Mathesis universalis*:

Comincio a formarmi un'idea della logica del tutto diversa da quella che avevo prima. La interpretavo come un giuoco proprio della scuola, ma ora comprendo che, come voi la intendete, è come una *Matematica universale* [*mathesis universalis*]. Piaccia a Dio che la si spinga a qualcosa di più ancora in modo da trovare quei veri sussidi della ragione [...] che eleverebbero gli uomini al di sopra del loro stato presente.²⁶

Leibniz riesce così ad intravedere nella logica aristotelica delle potenzialità inedite ed inesplorate, che irromperanno nella storia umana soltanto nel Novecento attraverso la nascita e gli sviluppi dell'informatica, dei calcolatori elettronici e dell'intelligenza artificiale. In tal senso, appare come una sorta di profezia quanto scriveva il filosofo tedesco a Gabriel Wagner in una lettera del 3 gennaio 1697:

pochi conoscono o sfruttano i vantaggi e quasi è una fatalità per il genere umano riuscire a servirsi così poco dei favori e dei tesori della natura benigna, da Dio prestati. Quindi *sono del parere che gli uomini già adesso potrebbero far cose incredibili, se s'impegnassero*, ma i loro

²⁴ G.W. Leibniz, *Nuovi saggi sull'intelletto umano*, in *Scritti filosofici*, pp. 593-594. Il corsivo è nostro.

²⁵ *Ivi*, pp. 504-506.

²⁶ *Ivi*, p. 631. Sono considerazioni esplicitate ulteriormente nella lettera di Leibniz a Gabriel Wagner: «All'occasione di una disputa più o meno matematica, una volta feci un esperimento con uno scienziato. Ambedue cercavamo la verità ed eravamo in corrispondenza l'uno con l'altro in forma cortese, ma non senza lagnanze reciproche, perché l'uno storciva, pur senza volere, l'opinione e le parole dell'altro. Allora proposi la forma sillogistica, che piacque anche al mio avversario, e in questa forma proseguimmo la disputa oltre il 12° prosillogismo. Dal momento che cominciammo così, cessarono le lagnanze e ognuno comprese l'altro, non senza ulteriore profitto per tutte le due parti. Poiché facilmente e piacevolmente si può praticare di ricorrere all'invio di sillogismi e prosillogismi nelle risposte formali, bisognerebbe allo stesso modo venire a capo delle importanti questioni scientifiche e liberarsi dalle fantasticherie e dai sogni, perché in forza del carattere stesso del procedimento, si eviterebbe ogni ripetizione, digressione, prolissità superflua, insufficienza, occultamento intenzionale e preterintenzionale, trascuratezza, infine ogni disordine, fraintendimento e mossa illecita» (G.W. Leibniz, *Lettera a Gabriel Wagner sull'importanza della logica*, in *Nuovi saggi sull'intelletto umano*, p. 786).

occhi sono tenuti ancora chiusi e *tutto deve aspettare il suo tempo per maturare*. Perciò penso, che *una testa di cavolo con i vantaggi ausiliari e con l'impiego di essi, possa superare i migliori*, come il bambino con il regolo riesce a tracciare linee migliori di quelle disegnate a mano libera dal più eccellente maestro. Gli ingegni più meravigliosi potrebbero fare incredibili progressi se traessero vantaggio da quei mezzi.²⁷

Se Leibniz intravede tali potenzialità insite nel ragionamento logico e meccanico, non può non riconoscere che tale intuizione non sarebbe stata possibile senza l'aver intercettato il legame allora latente tra logica filosofica e matematica: «Sono convinto però e mi sembra già di prevedere, anzi l'ho già pregustato, che quest'arte della ragione può essere portata a un livello incomparabilmente più alto, ma – da parte mia – senza la matematica difficilmente ci sarei arrivato».²⁸

2.3. *Riscrivere la logica in simboli matematici e la matematica in simboli logici*

Le intuizioni di Leibniz dovettero attendere circa centocinquanta anni per essere ulteriormente esplicitate e in qualche modo realizzate. Sarà infatti il matematico irlandese George Boole, che trasformerà la logica da “filosofica” a “matematica”, traducendo il ragionamento deduttivo tipico dei sillogismi e delle proposizioni ipotetiche in espressioni ed equazioni algebriche. Il corretto ragionamento diventa pertanto un calcolo matematico. Queste idee sono espresse originariamente nell'opera del 1847 intitolata *The Mathematical Analysis of Logic (L'analisi matematica della logica)* il cui sottotitolo mette bene in luce l'obiettivo realizzato da Boole: *Being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning (Un saggio verso un calcolo del ragionamento deduttivo)*.²⁹

Boole costruisce un'algebra per la logica, introducendo simboli per identificare classi di oggetti individuali ed operazioni da compiere su tali classi. Potremmo dire che l'algebra di Boole è fondata su un'interpretazione insiemistica della logica. Le classi sono concepibili come insiemi e le operazioni algebriche come operazioni insiemistiche. Ad esempio, Boole indica con I l'intero universo degli individui e con X una particolare classe di individui. In tal modo $I - X$ indicherà la classe degli individui che non sono in X . La classe senza individui, la classe vuota, sarà simbolizzata con 0 . Per definire le operazioni, introduce il concetto di *simbolo elettivo*, ovvero un simbolo che permette di selezionare o scegliere elementi all'interno di una classe. Per cui alla classe X corrisponderà il simbolo elettivo x . In tal modo diviene possibile comporre tali operatori di scelta. Se consideriamo il simbolo elettivo x che seleziona elementi della classe X e il simbolo elettivo y che li seleziona dalla classe Y , giustapporre xy significherà scegliere prima, attraverso y , elementi della classe Y e poi, attraverso x , scegliere dalla classe Y gli elementi che sono anche nella classe X . Inoltre, sarà possibile unire due classi attraverso l'operatore di “somma”, intesa come una selezione sull'unione delle classi. Ad esempio, $x + y$ permetterà di selezionare individui che sono nella classe X o nella classe Y .

Attraverso queste basilari definizioni, Boole individua tre principi fondamentali della sua algebra per la logica, ovvero

²⁷ G.W. Leibniz, *Lettera a Gabriel Wagner sull'importanza della logica*, in *Nuovi saggi sull'intelletto umano*, p. 782. Il corsivo è nostro.

²⁸ *Ivi*, pp. 786-787.

²⁹ G. Boole, *The Mathematical Analysis of Logic. Being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning*, London, Macmillan, 1847. Nel seguito faremo riferimento alla traduzione italiana G. Boole, *L'analisi matematica della logica*, Torino, Bollati Boringhieri, 1993.

1. la proprietà *distributiva*: $x(u + v) = xu + xv$, in quanto è indifferente selezionare gli elementi della classe X che sono nella classe unione di U e V , oppure selezionare gli elementi che sono nella classe unione degli elementi selezionati tra gli X che sono in U e degli elementi selezionati tra gli X che sono in V ;
2. la proprietà *commutativa*: $xy = yx$, in quanto è indifferente selezionare gli elementi della classe X che sono anche nella classe Y oppure selezionare gli elementi della classe Y che sono anche in X ;
3. la proprietà degli *indici* (o dell'*idempotenza*): $xx = x$ o, più generalmente, $x^n = x$, poiché l'applicare due o più volte una selezione da una stessa classe X è equivalente ad una singola selezione dalla classe X .

In tal modo, il sillogismo aristotelico può essere verificato attraverso un calcolo matematico. Se, ad esempio, consideriamo il sillogismo del modo bArbArA, ovvero quello che coinvolge tre proposizioni universali del tipo “Tutti gli Y sono X ” (prima premessa), “Tutti gli Z sono Y ” (seconda premessa), quindi, “Tutti gli Z sono X ” (conclusione), possiamo tradurlo nelle seguenti equazioni algebriche. “Tutti gli Y sono X ” significa che la selezione di individui dalla classe Y è equivalente a selezionare individui dalla classe X che sono anche in Y , e ciò è esprimibile attraverso l'equazione $xy = y$ (1) oppure, in altri termini equivalenti, all'equazione $y(I - x) = 0$, in quanto la selezione di individui della classe Y che non sono in X non produce alcuna selezione effettiva, non essendoci individui da scegliere. Allo stesso modo “Tutti gli Z sono Y ” si tradurrà in $z(I - y) = 0$ oppure in $z = zy$ (2). A partire da quest'ultima equazione possiamo sostituire al posto di y l'espressione xy (utilizzando 1), ottenendo $z = zxy$ equivalente, grazie alla proprietà commutativa, a $z = zyx$. Ma zy possiamo sostituirlo con z (utilizzando 2), per cui avremo $z = zx$, che è proprio l'equazione algebrica che traduce la proposizione “Tutti gli Z sono X ”.

Similmente, Boole riuscirà ad applicare la sua algebra alle proposizioni ipotetiche, in modo che la classe X diventerà la rappresentazione della proposizione X e la verità della proposizione X sarà esprimibile con $x = I$ o, equivalentemente, scrivendo che $I - x = 0$, ovvero che la negazione di X è falsa.³⁰ Pertanto, per esprimere che le proposizioni X e Y sono entrambe vere (coniunzione), si scriverà l'equazione $xy = I$, oppure per dire che X è vera e Y è falsa si scriverà $x(I - y) = I$. Anche la disgiunzione (inclusiva) può essere facilmente codificata algebricamente. Per esprimere che la proposizione X è vera o che la proposizione Y è vera, si potrà scrivere l'equazione $(I - x)(I - y) = 0$, ovvero che è falso che entrambe siano false, e così via. In questo modo, possiamo ad esempio calcolare la validità del *modus ponendo ponens*. A partire dal fatto che “se X è vera, allora Y è vera” e “ X è vera”, si concluderà che “ Y è vera”. La proposizione “se X è vera, allora Y è vera” può essere equivalentemente espressa dicendo che è falsa la proposizione “ X è vera e Y è falsa”, ovvero $x(I - y) = 0$; mentre “ X è vera” si traduce in $x = I$. Sostituendo questo valore di x nella precedente equazione, si ottiene immediatamente che $I - y = 0$, quindi $y = I$, ovvero “ Y è vera”.

Boole dà così l'abbrivio per analizzare la logica con la strumentazione matematica, permettendone uno sviluppo fino ad allora immaginato solo da pochi. D'altro canto, gli approfondimenti sulla scrittura matematica, in modo da rendere quella disciplina sempre più rigorosa e meno suscettibile di errori, anche per le basi che offriva alla fisica, condussero a

³⁰ Cfr. *Ivi*, p. 56.

ricercare fondamenti sempre più stabili di tutte quelle discipline che rientravano nel campo della matematica, tentando di ridurle all'aritmetica, ovvero al mondo dei numeri naturali e delle loro proprietà. Alcuni matematici della seconda metà dell'Ottocento percepivano la possibilità di radicalizzare ulteriormente la struttura logico-dimostrativa dell'aritmetica, pensando di poter eliminare in qualche modo ogni aspetto intuitivo, esplicitando ulteriormente la catena delle deduzioni. Ci riferiamo particolarmente al tentativo di Gottlob Frege di ridurre la stessa aritmetica ad un sistema logico-formale.³¹

Questo era già l'obiettivo perseguito da Frege nella sua prima opera, intitolata *Begriffsschrift*, letteralmente "scrittura dei concetti", tradotta in italiano con *Ideografia* e avente come sottotitolo *Un linguaggio in formule del pensiero puro, a imitazione di quello aritmetico*. Per compiere questa logicizzazione dell'aritmetica, il logico tedesco cercherà di ridurre un concetto basilare dell'aritmetica, quale quello di *ordinamento* di una sequenza, a quello di conseguenza logica, per poi procedere alla riduzione logica del concetto stesso di *numero*. Ma prima di fare tutto ciò, dovrà formalizzare in qualche modo il linguaggio ordinario, che altrimenti resterebbe un ostacolo insormontabile verso il raggiungimento dello scopo. Si tratterà dunque di realizzare una revisione generale della logica filosofica classica, dove i concetti di *soggetto* e *predicato* saranno sostituiti da quelli di *argomento* e di *funzione*.

Frege introduce inizialmente una scrittura simbolica per esprimere un *giudizio*, ovvero la validità su un certo contenuto (che si può intendere come un oggetto o una proposizione) o su più contenuti connessi tra loro attraverso l'implicazione o la negazione. Ad esempio, la scrittura

┌— A

esprime la validità della proposizione A, mentre la scrittura

┌— A
└— B

esprime la validità della proposizione "se B allora A". La negazione viene introdotta attraverso una linea verticale da porre nelle vicinanze di ciò che si vuole negare. Ad esempio, la scrittura

┌—┐ A
└—┐ B

esprime la validità della proposizione "se B allora non A". In tal modo, Frege riesce a formalizzare la logica proposizionale e a tradurre nella sua scrittura enunciati tautologici come il seguente

┌—┐ ┌—┐ b
└—┐ └—┐ a
└—┐ a
└—┐ b

³¹ Cfr. G. Frege, *Ideografia, un linguaggio in formule del pensiero puro, a imitazione di quello aritmetico*, in L. Geymonat, C. Mangione (a cura di), *Logica e aritmetica*, Torino, Bollati Boringhieri, 1965, tradotto dall'originale *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formel-sprache des reinen Denkens*, Halle, 1879. Per quanto riguarda la differenza tra geometria ed aritmetica in Frege rimandiamo a D. Palladino, *La filosofia della matematica di Frege*, in N. Vassallo (a cura di), *La filosofia di Gottlob Frege*, Milano, FrancoAngeli, 2003, pp. 157-159.

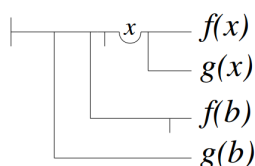
che esprime “se b implica a , allora non a implica non b ”. Per sviluppare e chiarire la logica aristotelica dei predicati, viene introdotto il concetto di *funzione*, che permette di esprimere proprietà di un oggetto o *argomento*, o relazioni tra diversi argomenti, ma anche proprietà valedoli per qualsiasi oggetto. Ad esempio le due seguenti scritture

$$\vdash \Phi(A) \qquad \vdash \Psi(A,B)$$

esprimono rispettivamente che “l’argomento A gode della proprietà Φ ” e che “gli argomenti A e B sono nella relazione Ψ ”, mentre la scrittura

$$\vdash x \vdash \Phi(x)$$

indica che qualsiasi argomento poniamo nella funzione Φ otteniamo sempre un fatto. In altri termini si sta affermando che “per ogni x , vale la proprietà Φ ”. Frege fa notare che combinando tali scritture si può facilmente ottenere una scrittura formale del classico quadrato delle opposizioni logiche, raffigurando enunciati contrari, contraddittori, subcontrari e subalternati. Inoltre, deduce una serie di “giudizi del puro pensiero” anche attraverso l’uso delle funzioni, come ad esempio



che nel formalismo logico attuale possiamo tradurre, dicendo che “se $g(b)$ e non $f(b)$, allora non accade che per ogni x , $g(x)$ implica $f(x)$ ” o, in altri termini equivalenti, “se $g(b)$ e non $f(b)$, allora esiste qualche x per cui non accade che $g(x)$ implica $f(x)$ ”.³² Frege assume, ad esempio, che b stia per “struzzo”, $g(A)$ per “ A è un uccello” e $f(A)$ per “ A può volare”. Avremo così il giudizio “se questo struzzo è un uccello e non può volare, allora alcuni uccelli non possono volare”.

L’*Ideografia* pone così le basi formali per permettere all’aritmetica di essere espressa nel formalismo logico. A tal scopo, Frege delinea gradualmente la nozione di *estensione di un concetto*, prima informalmente nell’opera *Fondamenti dell’Aritmetica*,³³ poi, più formalmente nei *Principi dell’Aritmetica*.³⁴ Se per *concetto* possiamo intendere una funzione per cui ogni suo argomento assume un valore di verità, l’*estensione* di un concetto sarà intesa come l’insieme di tutti gli oggetti che ricadono sotto quel dato concetto. La definizione di *numero naturale* data da Frege è fondata sulla nozione di estensione e sul fatto che ad ogni concetto

³² Il quantificatore universale “per ogni”, assieme al connettivo di negazione “non”, permette di esprimere il quantificatore esistenziale “alcuni”. Dire che una proprietà non vale per ogni oggetto è infatti equivalente a dire che esistono alcuni oggetti per cui quella proprietà non vale. Più formalmente diremo che “non per-ogni x $P(x)$ ” è equivalente a “alcuni x non $P(x)$ ”. Ciò permette di definire il quantificatore esistenziale attraverso due negazioni, una che precede e l’altra che segue il quantificatore esistenziale: “alcuni x $P(x)$ ” = “non per-ogni x non $P(x)$ ”.

³³ Cfr. G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau, 1884.

³⁴ Cfr. Id, *Grundgesetze der Arithmetik*, I-II, Jena, Verlag Hermann Pohle, 1893-1903.

deve corrispondere una propria estensione, il cosiddetto *principio di comprensione*. Tale principio si rivelerà contraddittorio in se stesso (*antinomia di Russell*) e ciò farà per certi aspetti vacillare l'intera impostazione di Frege.³⁵ Infatti è possibile considerare il concetto R che si costituirebbe come "l'insieme di tutti gli insiemi che non sono elementi di se stessi". Essendo R stesso un insieme, ci possiamo chiedere se R sia un elemento di se stesso. Se lo fosse, allora per come è definito il concetto R , ciò significa che R sarebbe un insieme che non è un elemento di se stesso. Viceversa, se R non fosse un elemento di se stesso, allora per sua definizione lo dovrebbe essere.

3. Impotenza e potenza della sacra scrittura matematica

Il cammino di ricerca di una scrittura matematica, in grado di chiarire e di dare sempre più evidenza e rigore alle asserzioni in tale ambito, nonostante il palesarsi di elementi contraddittori, come quello appena citato dell'antinomia di Russell, continuerà ulteriormente ad approfondire quella stessa direzione di ricerca, tendente a ridurre l'aritmetica al formalismo logico o quantomeno ad una formalizzazione radicale che avrebbe permesso, almeno in linea di principio, di risolvere ogni questione aperta nella matematica. A ciò aspirava il progetto di Hilbert sulla matematica e i suoi inviti a trovare procedure automatiche (algoritmi) per risolvere problemi. Si pensi al *decimo problema* dell'elenco dei 23 problemi proposti da Hilbert nel 1900, in cui chiedeva di trovare una tale procedura per risolvere equazioni diofantee arbitrarie, oppure al *problema della decisione* (*Entscheidungsproblem*), che propose nel 1928, consistente nel determinare una procedura meccanica in grado di stabilire, data una formula della logica dei predicati del primo ordine, se si tratta di un teorema, ovvero se è deducibile a partire dagli assiomi della logica.

Le ricerche logico-matematiche degli anni successivi condussero a risultati alquanto inattesi, sebbene tracce che andavano in tali direzioni fossero già rinvenibili altrove. Ci riferiamo ai *teoremi di incompletezza* di Kurt Gödel (1931), all'esistenza di problemi algoritmicamente indecidibili individuati da Alonzo Church (1936) ed Alan Turing (1936) e al *teorema di indefinibilità* di Alfred Tarski (1936). In particolare, ci soffermiamo sui rilevanti risultati di Gödel sull'incompletezza dell'aritmetica, presentati nella sesta e nell'undicesima proposizione del suo originario articolo.

La sesta proposizione divenne nota come *primo teorema di incompletezza*, secondo cui in ogni teoria matematica coerente in grado di esprimere l'aritmetica esistono enunciati formalmente indecidibili, ovvero enunciati né dimostrabili né refutabili a partire dagli assiomi del sistema e dalle regole di derivazione. In altri termini, il mondo dei numeri naturali non è catturabile da nessuna teoria assiomatico-deduttiva. Ogni tentativo di formalizzazione, attraverso assiomi e regole di deduzione, permetterà sempre la presenza nel mondo dei numeri naturali di asserzioni "vere" ma non dimostrabili. Il riferimento ad un "mondo" dei numeri naturali potrebbe rimandare ad un orientamento platonista in matematica, non certamente nel ritenere che esista un fantomatico reame della matematica, ma quanto meno che l'astrazione del contare rimandi a proprietà proprie di quel mondo, che si cerca di afferrare attraverso assiomatizzazioni. Il mondo dei numeri è dunque quell'oggetto costituito dai classici numeri naturali (1, 2, 3, e così via) che ci permettono di contare e su cui abbiamo concepito le classiche operazioni di somma e di prodotto. In questo mondo si possono individuare particolari numeri non ottenibili attraverso il prodotto di due numeri maggiori di 1. Tali

³⁵ Cfr. Id, *Lettera XV/2* [xxxvi/2], datata 22 giugno 1902, in L. Geymonat, C. Mangione (a cura di), *Logica e aritmetica*, p. 185.

numeri li chiamiamo “primi”. E nel mondo dei numeri naturali *i numeri primi sono infiniti*. La “verità” di questa asserzione può essere intesa nel senso classico dell’*adaequatio rei et intellectus*, ovvero nella sua conformità al mondo dei numeri naturali, dove effettivamente è sempre possibile trovare un numero primo più grande di quello precedentemente scoperto. Un enunciato indecidibile *A* sembra trascendere questa nozione di verità, in quanto non solo non siamo in grado di dimostrare o refutare *A*, ma non siamo neppure in grado di “vedere” nel mondo della matematica né *A* né la negazione di *A*. Ad esempio, all’interno della teoria assiomatica dei numeri naturali di Peano, Kirby e Paris (1982) hanno dimostrato che il cosiddetto *teorema di Goodstein* è indecidibile,³⁶ mentre all’interno della teoria standard degli insiemi Gödel (1940) e Cohen (1963) hanno dimostrato che l’*ipotesi del continuo*³⁷ avanzata da Cantor è indecidibile. Quando diciamo infatti che l’ipotesi del continuo non è dimostrabile nella teoria assiomatica degli insiemi, non abbiamo alcuna indicazione sulla verità o falsità dell’ipotesi. Tuttavia, non saremo mai in grado di concettualizzare all’interno di quella teoria un insieme infinito che sia più grande del numerabile e più piccolo del continuo, altrimenti avremmo dimostrato tale ipotesi. Dunque, nella nostra visione del mondo degli insiemi potremmo dire che l’*ipotesi del continuo* è vera. Ma non si tratta più di una verità oggettiva di corrispondenza ad un astratto e separato mondo degli insiemi, piuttosto sarà una sorta di verità soggettiva o anche intersoggettiva (dato che quel mondo è condiviso con la comunità umana) in riferimento al *nostro* mondo degli insiemi. Una “verità” che potrà invitare a ripensare l’intera teoria degli insiemi e la concezione stessa di insieme, perché cominciamo ad intravedere qualcosa di nuovo e di inatteso.

Il *secondo teorema di incompletezza* di Gödel dimostra che la coerenza del sistema assiomatico-deduttivo dell’aritmetica è indecidibile all’interno della teoria. In altri termini informali, potremmo dire che in ogni teoria matematica contenente l’aritmetica, se coerente, non è possibile dimostrare la coerenza della teoria, ovvero non possiamo sapere se, dimostrata una certa proposizione *A*, non sarà anche possibile dimostrare la negazione di *A*. È un risultato che generalizza il primo teorema di incompletezza e da cui, lo stesso Gödel trae la conclusione dell’*inesauribilità* della matematica, in quanto questo risultato «rende impossibile che qualcuno costruisca un certo sistema ben definito di assiomi e regole, e faccia coerentemente la seguente asserzione su di esso: Tutti questi assiomi e regole io percepisco (con certezza matematica) come corretti, e inoltre, io ritengo che essi contengano l’intera matematica».³⁸

In tal senso, possiamo ritenere che *la matematica è al di là di ogni sistema di scritture logico-formali*. La matematica non si esaurisce nel linguaggio logico-formale, ma trova espressione attraverso tale linguaggio. La scrittura logico-formale, apice dei tentativi di produrre una scrittura univoca e non ambigua, si mostra intrinsecamente aperta verso ciò che riesce ad esprimere sintatticamente ma di cui per certi aspetti non dispone totalmente. La matematica non è riducibile a questa scrittura, in quanto non può esistere un sistema

³⁶ Cfr. L. Kirby, J. Paris, *Accessible Independence Results for Peano Arithmetic*, «Bulletin of the London Mathematical Society», 14, 1982, 4, pp. 285-293.

³⁷ Si tratta della congettura per cui non esistono infiniti intermedi tra l’infinito dei numeri naturali (infinito numerabile) e l’infinito dei numeri reali (infinito continuo).

³⁸ K. Gödel, *Collected Works, III. Unpublished Essays and Lectures*, Oxford-New York, Oxford University Press, 1995, p. 309; tale tesi venne espressa da Gödel durante la *Gibbs Lecture* per l’*American Mathematical Society* il 26 dicembre del 1951.

assiomatico-deduttivo per la matematica formalmente completo. In altri termini, la matematica non è concepibile come un sistema formale assiomatico-deduttivo.³⁹

Se ciò dovrebbe emergere con chiarezza almeno per il sapere matematico, quali conseguenze possiamo trarne per quanto concerne le possibilità conoscitive dell'essere umano inteso almeno come colui che fa matematica? Anche qui, al di là delle tante interpretazioni che negli anni sono state date sui teoremi di incompletezza, è bene prendere in considerazione quanto asseriva lo stesso autore, offrendo la seguente interpretazione:

O la matematica è inesauribile nel senso che i suoi assiomi evidenti non possono mai essere ricompresi in una regola finita, il che vuol dire che la mente umana (anche nel regno della pura matematica) sorpassa infinitamente i poteri di qualsiasi macchina finita, oppure esistono problemi assolutamente irrisolvibili [ovvero verità matematiche che sono per noi totalmente inconoscibili].⁴⁰

Commentando tale passo, Francesco Berto, lo parafrasava nei seguenti termini: «O la mente ha davvero una natura non algoritmica e non meccanizzabile, oppure se la mente umana è effettivamente (equivalente a) una macchina di Turing, allora ci sono enunciati aritmetici assolutamente indecidibili».⁴¹ Pertanto se la mente umana fosse realmente una macchina deduttiva (con evidenti *bug* nel programma), non potrebbe «comprendere interamente il proprio funzionamento»: se siamo macchine di Turing, non possiamo sapere esattamente che macchine di Turing siamo».⁴² Ovviamente, tali riflessioni si collocano all'interno di una prospettiva che approssima la mente umana ad una macchina calcolante, una similitudine che non può reggere per molteplici ragioni, sebbene gli aspetti calcolanti e il pensiero logico-deduttivo siano autenticamente pensiero umano.⁴³ Tuttavia, come la matematica non si riduce a calcolo deduttivo a partire da assiomi, anche *l'essere umano come homo mathematicus* è al di là di ogni sistema linguistico formalizzato, in quanto riconosce (almeno) la “verità” delle proposizioni aritmetiche. Ciò non vuol dire che ciò che non è possibile al sistema formale matematico sia possibile al sistema mente umana, almeno se con “possibile” si intende in entrambi i casi la produzione di una “dimostrazione matematica”. Ma se “possibile”, significa “vedere la verità” di una proposizione in altro modo, potremmo dire primariamente in modo semantico piuttosto che sintattico, allora l'essere umano non si lascia configurare come un sistema logico-formale o una macchina di Turing.⁴⁴

³⁹ Cfr. C. Cellucci, *La filosofia della matematica del Novecento*, Roma-Bari, Laterza, 2007, pp. 149-151. Secondo Cellucci, infatti, «il primo teorema di Gödel confuta un'assunzione che non solo sta alla base di tali programmi [quelli di Frege, Hilbert e Brouwer] ma è condivisa dalla stragrande maggioranza dei matematici, cioè che il metodo della matematica è il metodo assiomatico» (*ivi*, p. 83).

⁴⁰ K. Gödel, *Collected Works III*, p. 310.

⁴¹ F. Berto, *Tutti pazzi per Gödel. La guida completa al Teorema di Incompletezza*, Roma-Bari, Laterza, 2008, p. 222.

⁴² *Ibidem*.

⁴³ A riguardo rimandiamo al nostro G. Amendola, *Antropo-Logos. La ragione al crocevia di intelligenza artificiale, razionalità scientifica, pensiero filosofico e teologia cristiana*, Roma, Studium, 2021.

⁴⁴ Riteniamo che in questo sia condivisibile la posizione di Roger Penrose espressa, ad esempio, in R. Penrose, *La mente nuova dell'imperatore. La mente, i computer e le leggi della fisica*, Milano, Rizzoli, 1992, senza tuttavia esserci il bisogno di ridurre la razionalità umana a quella logico-deduttiva (cfr. G. Amendola, *Antropo-Logos*, pp. 71-74).

Questi e altri risultati hanno spesso condotto ad avallare l'ipotesi di una sorta di relativismo conoscitivo assoluto, fondata sulla soggettività di ogni conoscenza o sull'irrazionalità stessa del cosmo. Come se il sogno infranto di Leibniz e compagni, quello di raggiungere un linguaggio modellato su quello logico-matematico in grado di risolvere ogni controversia umana e di costruire una conoscenza oggettiva e indubitabile per tutti, avesse come diretta conseguenza l'arbitrarietà o l'impossibilità di ogni conoscenza. Pur ammettendo tali limitazioni (rispetto all'obiettivo proposto) del potere delle scritture matematiche nella comprensione della matematica e del mondo, d'altro canto, non si possono non riconoscere gli enormi risultati raggiunti, proprio attraverso questo cammino di simbolizzazione e formalizzazione.

Innanzitutto, i vantaggi della scrittura simbolico-formale in matematica hanno consentito di rendere sempre più chiari e intuitive le conoscenze in ambito algebrico e geometrico, come preconizzato ed in parte realizzato da Cartesio. Tant'è che oggi le equazioni di primo e secondo grado, così complicate ai tempi del pensatore francese, vengono studiate da tutti già alle scuole medie inferiori. Per quanto riguarda invece la geometria, un'idea fondamentale per aiutarne lo sviluppo e la crescita, nonché il suo utilizzo in altre scienze, sarà quella di considerare le figure geometriche come numeri ed equazioni dell'algebra, ovvero l'approccio analitico e algebrico di Cartesio alla stessa geometria o viceversa. Un'equazione algebrica diventa così un luogo di punti su un piano (il piano cartesiano). Uno studioso di matematica odierno dinanzi all'equazione $x^2 + y^2 = 1$, non ha semplicemente davanti un'equazione algebrica, ma la circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine degli assi cartesiani. In sintesi: *il simbolismo si è mostrato una strategia fondamentale per il procedere della conoscenza matematica.*

Inoltre, lo stesso linguaggio logico-formale ha mostrato e continua a mostrare le sue incredibili potenzialità per risolvere problemi computazionalmente complessi che sembravano di pertinenza esclusiva dell'essere umano. Gli sviluppi odierni dei cosiddetti sistemi di intelligenza artificiale (IA) consentono infatti di realizzare in modo automatico svariati compiti ritenuti "intelligenti" con sempre più efficienza e velocità. Si pensi, giusto per fare qualche esempio, ai sistemi di IA in grado di tradurre il linguaggio parlato in scrittura oppure di tradurre un testo scritto da una lingua ad un'altra o alla possibilità di riconoscere oggetti e volti presenti in foto ed immagini, o ancora ad automobili che diventano sempre più realmente auto-mobili, o a tante applicazioni utili in ambito medico per fare diagnosi e tantissime altre tecnologie informatiche presenti nei più svariati ambiti della vita. Si tratta, come abbiamo accennato, delle potenzialità insite nel pensiero astratto e calcolante e nei linguaggi logico-formali, che sebbene non siano adeguati a spiegare e comprendere la nostra realtà, tuttavia, anche nella loro astrazione intercettano qualcosa del mondo in cui viviamo e contribuiscono a inserirvi tecnologie di grande utilità per l'essere umano e per migliorare la qualità stessa della vita, almeno quando sono progettate ed usate per favorirla e non per degradarla o disumanizzarla. Il principio-guida dell'intelligenza artificiale è stato infatti ben sintetizzato da uno dei suoi padri fondatori, John McCarthy, secondo cui ogni aspetto dell'apprendimento od ogni altra caratteristica dell'intelligenza poteva essere descritta in modo talmente preciso da consentire la costruzione di una macchina calcolante in grado di emularla. Forse, senza rendersene conto, McCarthy fissava in tal modo una caratteristica fondamentale dell'intelligenza e della conoscenza artificiale, che al tempo stesso, la poneva infinitamente distante dall'intelligenza e dalla conoscenza umana: la possibilità in linea di principio di realizzare una *descrizione precisa*, ovvero una scrittura logico-formale in grado di

trasferire qualsiasi conoscenza umana su un calcolatore. Ma nonostante l'insuperabile distanza tra il conoscere umano e il conoscere artificiale, non possiamo negare il potere dell'astrazione sulla realtà. In sintesi: *il simbolismo formale si mostra fondamentale per conoscere e trasformare il mondo.*

4. *La rivelazione delle sacre scritture matematiche*

Agli elementi che abbiamo analizzato nel precedente paragrafo sull'impotenza della scrittura matematica (l'esistenza di proposizioni indecidibili, l'incompletezza di ogni sistema assiomatico-deduttivo e l'indimostrabilità della coerenza interna di ogni teoria matematica) e sulla potenza di tale scrittura (gli sviluppi dell'algebra simbolica nel fare matematica e delle tecnologie informatiche attraverso i sistemi di IA basati sul calcolo logico e algoritmico) se ne potrebbero aggiungere ulteriori. Ci sembrano rilevanti almeno altri due elementi emersi sul rapporto tra matematica e natura, tra razionalità matematica e mondo naturale. Per quanto riguarda l'impotenza della razionalità matematica nel descrivere il mondo naturale si pensi alla scoperta risalente già alla scuola pitagorica dell'incommensurabilità tra il lato e la diagonale di un quadrato, ovvero alla *il-logicità* (assenza di *logos*) o *ir-razionalità* (assenza di *ratio*) della/nella natura, mentre per quanto riguarda la potenzialità della stessa *ratio mathematica* per conoscere la natura si pensi ai legami sempre più stretti tra matematica e fisica. Legami intravisti da Galileo Galilei sul sorgere delle scienze moderne (il libro della natura scritto nel linguaggio matematico) e che hanno condotto il premio Nobel per la fisica Eugene Wigner a parlare di una "miracolosa" ed "irragionevole" efficacia della matematica nelle scienze della natura.⁴⁵

Tutto ciò ci induce a ritenere che, se da un lato, *la razionalità matematica è in qualche modo presente nella realtà* e, pertanto, la matematica permette di cogliere aspetti della realtà fisica, dall'altro lato, *la razionalità matematica non cattura la realtà*, il mondo fisico si mostra intrinsecamente ed essenzialmente inafferrabile dalla razionalità matematica. Da un lato, dunque assistiamo ad uno *s-velamento* della realtà attraverso l'indagine matematica, un togliere il velo per guardare qualcosa della struttura della realtà fisica, dall'altro lato, invece, osserviamo un *ri-velamento* di tale realtà, scorgendo un nuovo velo, forse ben più spesso del primo, che non consente di comprenderla fino in fondo e di carpirne il fondamento ultimo.

S-velare e ri-velare sono dimensioni presenti nel concetto teologico-filosofico di *rivelazione*. Se ciò non è forse corrispondente ad una analisi etimologica del termine latino *revelatio*, traduzione del greco *apokalyptein*,⁴⁶ tuttavia questo "togliere il velo" non rimuove completamente il nascondimento di ciò che ci sarebbe da conoscere. Uno dei principali teologi cristiani del XX secolo, Han Urs von Balthasar, riprendendo la concezione heideggeriana dell'essere come di ciò che svelandosi si vela nuovamente, non esita ad affermare che

La verità, *a-letheia*, è il non nascondimento dell'essere. Ogni essere è come tale ogni volta svelato in quanto può in genere uscire, dal nascondimento nel nulla e nel mistero del divino consiglio, fuori nell'esistenza, dove resta abbandonato come ente rivelato allo sguardo della

⁴⁵ Su questi ultimi aspetti rimandiamo alle riflessioni che abbiamo fatto in altra sede: G. Amendola, *La ragionevole ineffabilità della natura al linguaggio matematico. Aspetti paradossali della misurazione della realtà fisica*, in G.M. Arrigo, C. Tagliapietra (a cura di), *Dove abita la verità? Riflessioni sul vero e sul falso nell'epoca contemporanea*, Roma, ESC, 2023.

⁴⁶ Cfr. G. Mazzillo, *Dio sulle tracce dell'uomo. Saggio di teologia della rivelazione*, Milano, San Paolo, 2012, p. 143.

conoscenza. Fino a tanto che l'essere è conoscibile è già da sempre, come tale svelato [...]. D'altra parte, questa specie di confessione delle cose, che confessano la loro verità, è essa stessa non indiscreta e non illimitata. Ha i suoi limiti nell'intimità dell'essere. Le cose sono non soltanto svelate, sono sempre e fino alla fine altrettanto essenzialmente velate.⁴⁷

In questo accadere dell'essere come rivelazione emerge una realtà fisica come *mistero* (e non soltanto come enigma da risolvere) in quanto ciò che viene svelato fenomenicamente resta essenzialmente inafferrabile, irriducibile alle teorie fisico-matematiche e più generalmente alle parole umane, tanto più quando queste parole ricercano un estremo rigore e una precisione tecnica, finendo col dimenticare di essere soltanto un indicatore visibile di una realtà invisibile. A riguardo, ad esempio, Paolo di Tarso non esitava ad ammettere, riferendosi alle Scritture bibliche e al suo nucleo più sacro, quello delle “dieci parole”, che «la lettera uccide, lo spirito invece dà vita» (2Cor 3,6). Ora, se ammettiamo la dimensione rivelativa e misterica della realtà fisica, occorre anche riconoscere che nessuna teoria fisico-matematica può giungere ad essere una “teoria del tutto” (*theory of everything*)⁴⁸ e non solo perché la realtà fisica è al di là di qualsiasi idea astratta (la teoria fisico-matematica), ma anche perché del presunto “tutto” da poter descrivere non vengono minimamente sfiorate dimensioni in esso presenti come la vita e la coscienza. Se queste fanno parte del “tutto” come può essere constatato fenomenologicamente, una tale teoria fisico-matematica dovrebbe giungere quantomeno a descrivere queste realtà presenti nel nostro universo fisico, a meno di non negarne la presenza. Potremmo dunque dire che una “teoria del tutto” dipende da che cosa l'osservatore “vede”. Se l'osservatore non vede nulla, la teoria del tutto è già pronta ed equivale ad un insieme vuoto di proposizioni; se l'osservatore vede qualcosa, al massimo la sua teoria giungerà a descrivere quel qualcosa che vede, ma non il tutto con il quale lo identifica immotivatamente. Più realisticamente ci sembra che dinanzi alla realtà fisica che appare all'osservatore e di cui l'osservatore stesso ne partecipa, cogliendone alcuni aspetti tramite la razionalità matematica, la rivelazione sia una categoria interpretativa più adeguata anche all'interno delle scienze della natura e della matematica, che mostrano esse stesse una dimensione misterica, invitando gli scienziati a riscoprire la centralità di un approccio più ampiamente sapienziale in cui collocare lo stesso metodo scientifico moderno.⁴⁹

In tal senso, una lettura esemplificativa del pensiero filosofico moderno (da Cartesio e dalla nascita del metodo scientifico fino ad oggi) potrebbe essere la seguente per quanto concerne la ricerca umana di ampliare il proprio sapere sulla realtà. Abbiamo visto inizialmente infatti come Cartesio e Leibniz, ma anche altri, avvertano il bisogno di una conoscenza sempre più oggettiva e meno soggetta ad opinabilità, per cui si fa spazio una indagine selettiva sul sapere, su ciò che possa dirsi scienza, che potremmo far partire almeno da Kant, in quanto il filosofo tedesco sul finire del Settecento, analizzando la ragione umana, giunge a mostrare che non può darsi una metafisica come scienza, avviando una fuoriuscita della metafisica dal sapere accademico. Tale linea di ricerca sembra ulteriormente ampliarsi

⁴⁷ H.U. von Balthasar, *Teologica, I: Verità del mondo*, Milano, Jaca Book, 2010, pp. 205-206 (trad. it. di *Theologik. Wahrheit der Welt*, Freiburg, Johannes Verlag Einsiedeln, 1985).

⁴⁸ Cfr. S. Weinberg, *Dreams of a Final Theory. The Search for the Fundamental Laws of Nature*, London, Hutchinson Radius, 1993; S. Hawking, *The Theory of Everything. The Origin and Fate of the Universe*, Phoenix Books, 2005; J.D. Barrow, *Theories of Everything. The Quest for Ultimate Explanation*, Oxford, OUP, 1990.

⁴⁹ Rimandiamo qui ad un nostro approfondimento sul metodo in chiave interdisciplinare: G. Amendola, *L'orizzonte sapienziale del metodo: considerazioni tra teologia, matematica e scienze empiriche*, in S. Rondinara (a cura di), *Metodo*, ilmiolibro self publishing, 2022, ISBN: 978-88-92390-38-6.

con l'analisi del linguaggio umano operata da Wittgenstein agli inizi del Novecento, giungendo a ritenere indicibile scientificamente anche l'etica e, più generalmente, ciò che rientrava nell'ambito delle scienze dello spirito (*Geisteswissenschaften*), avviando così anche la fuoriuscita delle scienze dello spirito dal sapere accademico fomentata particolarmente dai neopositivisti. Se ancora rimanevano, come baluardo di scientificità ed oggettività, le scienze della natura (*Naturwissenschaften*), in particolare la fisica con le sue basi matematiche, grazie al lavoro strettamente matematico di Gödel tra il 1928 e il 1930, la stessa matematica e già l'aritmetica (teoria dei numeri naturali) con tutto ciò che ne consegue sarebbe da rigettare in nome della ricercata oggettività, dicibilità e scientificità, in quanto la stessa aritmetica sarebbe in se stessa una disciplina aperta e incatturabile dal linguaggio e dalla razionalità umana. Ciò che ne conseguirebbe, in accordo con quanto accadeva per la metafisica e le scienze dello spirito, sarebbe stata la fuoriuscita delle scienze della natura e della stessa matematica dal sapere umano. Giungendo, in tal modo, ad un sapere svuotato di ogni conoscenza, un nichilismo conoscitivo assoluto.

La modernità, nella sua critica radicale a tutti i sistemi, può essere invece concepita come un movimento che conduce dinanzi alla dimensione misterica degli "oggetti" indagati (metafisica, etica, fisica, matematica, ecc.), ma spesso, dinanzi a tale mistero si è risposto con la totale rinuncia all'indagine o all'abbandono totale di ogni sorta di conoscenza, non riconoscendo la possibilità di modalità diverse di conoscere. Ciò condurrà per certi aspetti alla visione post-moderna enucleata da Lyotard⁵⁰ e agli epigoni più estremi che negano ogni possibilità di conoscenza,⁵¹ ma anche a tentativi di recupero del progetto della modernità alla luce del cammino epistemologico svolto.⁵² Proprio su quest'ultima prospettiva, quella di una neo-modernità, ci sembra fondamentale la (ri-)scoperta della dimensione rivelativa, misterica e sapienziale delle scienze e di ogni sapere in genere, a partire dalla stessa matematica.

Riteniamo pertanto che il cammino conoscitivo del pensiero occidentale non si concluda ponendoci dinanzi a quel nulla indifferenziato e irrazionale del nichilismo più estremo, ma piuttosto ci inviti a riconoscere una "nuova" *ratio/logos* della realtà, una meta-logica incatturabile, che alcuni, anche da altre ed ulteriori prospettive, hanno definito come *logica agapica* che conduce, in termini negativi, ad una sorta di *nichilismo rivelativo* oppure positivamente ad una *metafisica agapica*.⁵³ Infine, in merito alla dimensione rivelativa del conoscere, notiamo che *agape* è un termine teologicamente significativo, in quanto è il termine principale e più ricorrente utilizzato proprio nell'ambito della rivelazione ebraico-cristiana, in particolare nei vangeli e nella letteratura paolina e giovannea, per parlare di "amore", da intendere appunto come unione con l'altro che genera una conoscenza tutt'altro che astratta ed intellettualistica, ma da realizzare nell'unione con l'"oggetto" da conoscere. In tal senso nella *Prima Lettera di Giovanni* viene detto che «chi non ama (*agapon*) non ha conosciuto (*egno*) Dio, perché Dio è amore (*agape*)» (1Gv 4,8), invitando ad accogliere un fondamento della realtà per via rivelativa, allo stesso tempo, come *Logos* e *Agape*.⁵⁴

⁵⁰ Cfr. J.F. Lyotard, *La conditione postmoderne. Rapport sur le savoir*, Paris, Les Editions de Minuit, 1979 (trad. it. *La condizione postmoderna. Rapporto sul sapere*, Milano, Feltrinelli, 1981).

⁵¹ Cfr. M.P. Lynch, *True to Life. Why Truth Matters*, Massachusetts Institute of Technology, MIT Press, 2004 (trad. it. *La verità e i suoi nemici*, Milano, Raffaello Cortina, 2007).

⁵² Cfr. R. Mordacci, *La condizione neomoderna*, Torino, Einaudi, 2017.

⁵³ Cfr. D.G. Murray (a cura di), *La metafisica del terzo millennio*, Roma, Armando, 2001 e G. Lorzio, *La logica della fede. Itinerari di teologia fondamentale*, Milano, San Paolo, 2002.

⁵⁴ Per ulteriori chiarimenti sul rapporto tra *Logos* e *Agape* nella rivelazione ebraico-cristiana rimandiamo al quarto capitolo del già citato G. Amendola, *Antropo-Logos*. Presentando questa relazione a dieci giorni esatti

Giornaledistoria.net è una rivista elettronica, registrazione n° ISSN 2036-4938.

Tutti i contenuti pubblicati in questa rivista sono Copyright degli autori e, laddove non diversamente specificato, sono rilasciati con licenza Creative Commons: [Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International \(CC BY-NC-ND 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)



Per ogni utilizzo dei contenuti al di fuori dei termini della licenza si prega di contattare l'autore e/o la Redazione, al seguente indirizzo email:
redazione.giornaledistoria@gmail.com

dalla morte del cantautore italiano Franco Battiato (18 maggio 2021), tali considerazioni ci sono sembrate alquanto prossime al suo pensiero sintetizzato nel titolo del suo singolo: *Tutto l'universo obbedisce all'amore*, con cui abbiamo concluso il nostro intervento.